

## Тема: «Многополюсники».

Четырехполюсником принято называть электрическую схему, имеющую два входных зажима. В качестве примера могут быть названы трансформатор, линия передачи энергии, мостовая схема и т.п.

Часть электрической цепи, имеющая две пары зажимов, одна из которых является входной, а другая - выходной, называется четырехполюсником.

Если четырехполюсник содержит ЭДС, то в прямоугольнике ставится буква А ( первая буква слова «активный» ). Если буква А отсутствует, это значит, что четырехполюсник пассивный, т.е. не содержит ЭДС. В дальнейшем рассматривается теория пассивного четырехполюсника.

Входной ток обозначают  $i_1$ , входное напряжение  $-U_1$ ; ток и напряжение на выходе -  $I_2$  и  $U_2$ .

Четырехполюсник является передаточным звеном между источником питания и нагрузкой. К входным зажимам  $mn$ , как правило, присоединяется источник питания и нагрузкой. К входным зажимам  $mn$ , как правило, присоединяется источник питания. К выходным зажимам  $pq$ , как правило, присоединяется нагрузка.

Предполагает, что нагрузка четырехполюсника и напряжение на входе при работе четырехполюсника в качестве связующего звена между источником и нагрузкой могут изменяться, но схема внутренних соединений четырехполюсника и значения сопротивлений в ней остаются неизменными.

Четырехполюсник называют *симметричным*, если при перемене местами источник питания и нагрузки токи в источнике питания и в нагрузке не изменяются. В симметричном четырехполюснике  $A=D$ .

Систему уравнений (1) и (2) часто записывают так:

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2 \quad (1)$$

$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2 \quad (2)$$

Здесь  $A_{11} = A$ ,  $A_{12} = B$ ,  $A_{21} = C$  и  $A_{22} = D$ .

Систему (1) - (2) называют А- формой записи уравнений четырехполюсник.

При последовательном соединении четырехполюсников а и б применяют Z-форму, при параллельном соединении Y-форму, при последовательно-параллельном H-форму, при параллельно- последовательном G-форму, при каскадном A- форму.

В дальнейшем в качестве основной формы записи уравнений четырехполюсника будем пользоваться А- формой, т.е. уравнениями (1) и (2).

### Определение коэффициента четырехполюсника.

В формулу (1) и (2) входят комплексные коэффициент А, В, С, D.

Определение комплексов входных сопротивлений производится опытным путем при помощи ваттметра, амперметра и вольтметра по схеме.

Проведем опыты по определению входного сопротивления четырехполюсника в трех различных режимах его работы.

1. Определим комплекс входного сопротивления со стороны зажимов  $mn$  при разомкнутой ветви  $pq$  (х.х ветви  $pq$ , индекс ноль):

$$Z_{10} = z_{10} e^{i\varphi_{10}}$$

2. Определим комплекс входного сопротивления со стороны зажимов  $mn$  при коротком замыкании ветви  $pq$  (к.з., ставим индекс  $k$ ):

$$Z_{1k} = z_{1k} e^{i\varphi_{1k}}.$$

3. Найдем комплекс входного сопротивления со стороны зажимов  $pq$  при коротком замыкании зажимов  $mn$ :

$$Z_{2k} = z_{2k} e^{i\varphi_{2k}}.$$

В результате обработки данных трех опытов получаем комплексные сопротивления  $A, B, C, D$ . С этой целью из уравнений (1) и (2) найдем  $Z_{10}$  и  $Z_{1k}$  через  $A, B, C, D$ , а из (6.13) и (6.14) выразим  $Z_{2k}$  через  $B$  и  $A$ .

В первом опыте, при определении  $Z_{10}$ , ветвь  $pq$  было разомкнуто, поэтому  $I_2 = 0$ . Следовательно, из (1) и (2) получаем

$$U_{10} = AU_{20}, \quad I_{10} = CU_{20}.$$

Отсюда входное сопротивление

$$Z_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \frac{A}{C}.$$

Во втором опыте, когда определялось  $Z_{1k}$ , ветвь  $pq$  было короткозамкнута, поэтому  $U_2 = 0$ , и из (1) и (2) находим

$$U_{1k} = BI_{2k}; \quad I_{1k} = DI_{2k};$$

$$Z_{1k} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \frac{B}{D}.$$

### Схемы замещения пассивного четырехполюсника.

Функции пассивного четырехполюсника как передаточного звена между источником питания и нагрузкой могут выполнять простейшие электрические схемы, схемы замещения: трехлучевая звезда (Т-схема) или эквивалентный ей треугольник (П-схема).

Три сопротивления Т- или П-схем должны быть рассчитаны с учетом того, что схема замещения должна обладать такими же коэффициентами  $A, B, C, D$ , какими обладает заменяемый ею четырехполюсник.

Задача эта однозначна, так как схема замещения содержит три параметра и четырехполюсник характеризуется тоже тремя параметрами (одна связь между  $A, B, C, D$ , задана уравнением  $AD - BC = 1$ ).

Если четырехполюсник симметричный, то  $A=D$ , и в Т-схеме замещения  $Z_1=Z_2$ , а в П-схеме  $Z_5=Z_6$ .

## Круговая диаграмма четырехполюсника.

Пусть напряжение  $U_1$  на входе четырехполюсника неизменно по величине, фазе и частоте, а нагрузка  $Z_2 = z_2 e^{i\varphi_2}$  на входе четырехполюсника изменяется только по модулю, так что характеризующий ее угол  $\varphi_2$  остается постоянным.

В этом случае для тока  $I_2$ , напряжения  $U_2$  и тока  $I_1$  существуют круговые диаграммы. Покажем, что для тока  $I_2$  существует круговая диаграмма. С этой целью всю схему четырехполюсника за исключением нагрузки  $Z_2$ , заменим активным двухполюсником и по методу х.х и к.з. найдем ток  $I_2$  в ветви pq:

$$I_2 = \frac{U_{pqx.x}}{Z_{BXpq} + Z_2}.$$

Ранее был рассмотрен вопрос о построении круговой диаграммы для тока. Аналогичным образом производится построение круговой диаграммы для напряжения. Так, если в какой-то схеме изменяется по модулю сопротивление  $Z_2 = z_2 e^{i\varphi_2}$  в одной, скажем, второй ветви, то для напряжения на некотором участке  $ab$  этой схемы можно записать выражение,

$$U_{ab} = U_{abx.x} + \frac{U_{abk.z} - U_{abx.x}}{1 + \frac{z_2}{z_{2k}} e^{i(\varphi_2 - \varphi_{2k})}}.$$

Здесь  $U_{abx.x}$  - напряжение на зажимах  $ab$  при  $z_2 = \infty$ ,  $U_{abk.z}$  - напряжение на зажимах  $ab$  при  $z_2 = 0$ . Величина  $Z_{2k} = z_{2k} e^{i\varphi_{2k}}$  - входное сопротивление всей схемы по отношению к зажимам, к которым присоединяется сопротивление  $Z_2$ .

## Линейные диаграммы.

Под линейными диаграммами понимают диаграммы, в которых геометрическим местом концов вектора тока или напряжения является прямая линия.

По сути дела линейная диаграмма представляет собой частный случай круговой диаграммы, поскольку прямая есть дуга окружности с бесконечно большим радиусом.

## *Переходные процессы в нелинейных электрических цепях.*

Известно несколько различных приемов и методов расчета переходных процессов в нелинейных цепях. В данной главе будут обсуждаться только те из них, которые представляют наибольший интерес.

Рассматриваемые методы анализа и расчета переходных процессов в нелинейных цепях могут быть классифицированы следующим образом:

- 1) по виду основных операций, которые необходимо выполнять для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений,- на графические ( графо- аналитические ) и аналитические;
- 2) по характеру величины, для которой производится расчет,- на расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений.

Под графическими ( графо- аналитическими ) методами расчета понимают такие методы, в которых основными операциями при определении зависимости от времени искомых токов и напряжений являются графические построения, нередко сопровождаемые и некоторыми вспомогательными числовыми подсчетами.

Важно подчеркнуть, что в графических ( графо- аналитических) методах расчета характеристики нелинейных сопротивлений обычно не требуется выражать аналитически.

В данной главе рассмотрены следующие графические методы:

1. Метод, основанный на графическом подсчете определенного интеграла,
2. Метод Вольнкина

Аналитическими методами называют такие методы расчеты, в которых основной операцией при определении зависимостей искомых токов и напряжений от времени является точное или приближенное аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений цепи, в которые подставляются аналитические выражения характеристик нелинейных сопротивлений.

Далее рассмотрены следующие аналитические методы:

1. Метод интегрируемой нелинейной аппроксимации
2. Метод кусочно-линейной аппроксимации
3. Метод медленно меняющихся амплитуд.

Графические методы имеют следующие преимущества перед аналитическими:

- 1) в них не требуется, как правило, выражать характеристики нелинейных сопротивлений аналитически, и поэтому они свободны от погрешностей, связанных с аналитическим представлением характеристик нелинейных сопротивлений;
- 2) они довольно просто позволяют учесть гистерезис и другие сложные нелинейные зависимости.

В свою очередь аналитические методы имеют перед графическими свои преимущества. Из них основным является то, что они дают возможность получить решение в общем виде, а не для какого-то одного конкретного сочетания параметров. Получить решение в общем виде является желательным потому, что анализ его позволяет выяснить все особенности процесса при изменении всех параметров.

Как уже упоминалось, все методы расчета могут быть подразделены также на две подгруппы: на расчет по мгновенным значениям токов и напряжений и на расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений.

Точность расчета по огибающим уступает точности расчета по мгновенным значениям. Однако относительная быстрота проведения расчета

по огибающим и возможность судить о макроструктуре процесса часто являются решающими факторами.

Вообще же наиболее целесообразно там, где это необходимо, дополнять расчет по огибающим расчетом по мгновенным значениям. Метод расчета погибающим представлен методом медленно меняющихся амплитуд. Все остальные методы относятся к подгруппе расчета по мгновенным значениям.

Довольно часто электрические цепи содержат несколько нелинейных сопротивлений. Переходные процессы в таких цепях можно рассчитывать путем применения метода Вольнкина.

## 1. Методы расчета.

Метод расчета, основанный на графическом подсчете определенного интеграла, применим к нелинейным электрическим цепям, описываемым дифференциальными уравнениями первого порядка, допускающими разделение переменных. Последняя оговорка очень существенна. Она свидетельствует о том, что метод применим к цепям постоянного тока и, как правило, не применим к цепям переменного тока.

Основные этапы и последовательность расчета проиллюстрируем на конкретном примере.

**Пример 1.** Нелинейный конденсатор через сопротивление  $R$  подключается к источнику напряжения  $U$ . Пологая, что в схеме нулевые начальные условия, построить кривые изменения заряда  $q$ , напряжения на емкости  $u_c$  и тока  $i$  в функции времени.

Решение: Составим дифференциальное уравнение

$$u_c(q) + R \frac{dq}{dt} = U \quad (1)$$

Разделим переменные:

$$dt = R \frac{dq}{U - u_c(q)} \quad \text{или} \quad dt = RF(q) dq.$$

Для построения кривой

$$F(q) = \frac{1}{U - u_c(q)} \quad (2)$$

используем кулонвольтовую характеристику. С этой целью задаемся произвольными значениями  $q$ , по кулонвольтовой характеристике находим соответствующее ему  $u_c$  и по формуле (2) подсчитываем  $F(q)$ . При  $q=0$

$u_c=0$  и  $F(q) = \frac{1}{U}$ ; при  $u_c = UF(q) = \infty$ . Левую часть уравнения (1) интегрируем по  $t$  от 0 до текущего значения  $t$ , а правую- по  $q$  от  $q=0$  до текущего значения  $q$ . Получаем

$$t = R \int_0^q F(q) dq. \quad (3).$$

Подынтегральное выражение  $F(q) dq$  представляет собой заштрихованную площадку.

Величина тока в цепи для произвольного момента времени определяется при помощи формулы  $i = \frac{U - u_c}{R}$ .

## 2. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях методом интегрируемой нелинейной аппроксимации.

Метод интегрируемой нелинейной аппроксимации основан на аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления такой нелинейной функцией, которая, во-первых, достаточно точно отображает характеристику нелинейного сопротивления в предполагаемом интервале перемещения изображающей точки по ней и, во-вторых, - и это главное - дает возможность точно проинтегрировать уравнение в известных функциях.

Ценность метода заключается в том, что в результате интегрирования получают зависимость исследуемой величины от времени и от всех параметров схемы.

Метод применим к дифференциальным уравнениям первого порядка, а также к уравнениям, сводящимся к уравнениям первого порядка путем замены переменных.

## 3. Метод кусочно-линейной аппроксимации.

Замена характеристики нелинейного сопротивления отрезками прямых линий дает возможность перейти от нелинейного дифференциального уравнения к нескольким линейным уравнениям, отличающимся друг от друга лишь значениями коэффициентов.

Каждое из линейных уравнений справедливо для того интервала времени, в течение которого рабочая точка перемещается по данному линеаризованному участку. Метод применим к цепям, содержащим источники постоянной и(или) синусоидальной ЭДС, к цепям первого и более высоких порядков.

Для сложных нелинейных цепей с источником (источниками) синусоидальной ЭДС основная трудность расчета данным методом заключается в определении постоянных интегрирования и времени работы на каждом линейном участке, исходя из законов коммутации. В сложных цепях неизвестные определяют обычно из трансцендентных уравнений. Для решения трансцендентных уравнений часто применяют математические счетные машин.

Впервые идея метода была высказана русским физиком Н.Д. Папалекси в 1912г.

#### 4. Метод медленно меняющихся амплитуд.

В электротехнике, радиотехнике и других отраслях техники для расчета переходных процессов широко применяют метод медленно меняющихся амплитуд

Этот метод был предложен 1921 г. голландским физиком Ван-дер-Палем.

Рассмотрим основы этого метода на примере нелинейной цепи второго порядка, находящейся под воздействием периодической возмущающей силы.

Пусть уравнение этой цепи записывается следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = A \sin \omega t .$$

Под действием периодической силы с частотой  $\omega$  в цепи устанавливается вынужденное колебание с частотой  $\omega$ , а выше гармоника выражены слабо.

Примем, что искомая функция  $x(t)$  может быть представлена так:

$$x = a \sin \omega t + b \cos t ,$$

где  $a$  и  $b$  - медленно меняющиеся во времени амплитуды искомого колебания.

Медленность изменения  $a$  и  $b$  во времени определяется тем, что производные от их по времени являются величинами первого порядка малости по сравнению с произведениями  $\omega a$  и  $\omega b$ , т.е.

$$\frac{da}{dt} \ll \omega a \text{ и } \frac{db}{dt} \ll \omega b .$$

Обратим внимание на то, что слагаемые первого порядка малости оставлены в выражении для  $\frac{d^2x}{dt^2}$  и слагаемыми первого порядка малости пренебрегли в выражении для  $\frac{dx}{dt}$ .

Если максимальное значение слагаемого  $f(x)\frac{dx}{dt}$  выражающее собой падение напряжение в активном сопротивлении контура ( или контуров), соизмеримо с максимальными значениями остальных слагаемых уравнения, то в выражении  $\frac{dx}{dt}$  должны быть сохранены слагаемые первого порядка малости, которыми ранее пренебрегли. Огибающая колебаний определяется уравнением  $f(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$ .

## Тема: **Переходные процессы в линейных электрических цепях**

### Определение переходных процессов

До сих пор мы ограничивались расчетом изучением свойств электрических цепей постоянного, синусоидального и периодического несинусоидального токов. Каким образом происходит установления режима в цепи при включении и отключении источников электрической энергии, по каким законам происходит переход от одного режима к другому при изменении параметров цепи, при отключении и подключении ветвей, при коротких замыканиях и подобных им процессах - все эти вопросы были вне нашего внимания.

В данной главе рассмотрены переходные процессы. Под *переходными процессами* понимают процессы перехода от одного режима работы электрической цепи (обычно периодического) к другому (обычно также периодическому), чем – либо отличающемуся от предыдущего, например: величиной амплитуды, фазы, формой или частотой действующей и схеме ЭДС значениями параметров схемы, а также вследствие изменение конфигурации цепи.

Периодическим режимами обычно являются режим синусоидального тока, режим постоянного тока, а также режим отсутствия тока в ветвях цепи.

Переходные процессы вызываются коммутацией в цепи. *Коммутацией* называют процесс замыкания или размыкания рубильников или выключателей.

Физических переходные процессы представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего докоммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему послекоммутационному режиму.

Переходные процессы обычно являются быстропротекающими; длительность их составляет часто десятые, сотые, а иногда даже миллиардные доли секунды; сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд. Тем не менее изучение переходных процессов весьма важно, так как оно позволяет выявить возможные превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, выяснить возможные увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса.

Изучение переходных процессов дает возможность установить, как деформируется по форме и амплитуде сигналы при прохождении их через усилители, фильтры и другие радиотехнические устройства.

Приведение задачи о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянным и коэффициентами.

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для схемы рис.293 при замкнутом рубильнике. Сумма падений напряжения на индуктивности  $L$  и сопротивлении  $R$  равна э.д.с  $E$ :

$$U_L + Ri = E \quad \text{или} \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (1)$$

Как известно из математики, уравнение, содержащее неизвестную функцию ( в нашем случае  $i$ ) и ее производные ( в нашем случае  $L \frac{di}{dt}$  ), называется дифференциальным уравнением.

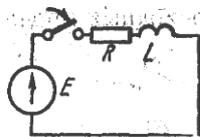
Таким образом, задача об определении тока как функции времени по сути дело есть задача о решение дифференциального уравнения.

Известно, что решение дифференциального уравнения есть не что иное, как отыскание функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению. Подстановка этой функции и ее производных превращает дифференциальное уравнение в тождество.

Решение дифференциальных уравнений будем проводить в данной главе тремя методами: классическим, операторным и методом, использующим интеграл Дюамеля.

Перед тем как изучать эти методы, не обходимо рассмотреть общие свойства линейных цепей при переходных процессах, а также общие законы, которым подчиняются переходные процессы в линейных электрических цепях.

Рис. 293



Первый закон коммутации

Ток через любую индуктивность непосредственно до коммутации – назовем его  $i_L(0_-)$  – равен току через ту же индуктивность непосредственно после коммутации – назовем его  $i_L(0_+)$ , т. е.

$$i_L(0_-) = i_L(0_+). \quad (2)$$

время  $t=0_-$  представляет собой время непосредственно до коммутации,  $t=0_+$  - время непосредственно после коммутации. Равенство (2) выражает собой первый закон коммутации.

Второй закон коммутации

Обозначим напряжения на емкости непосредственно до коммутации через  $u_C(0_-)$  и через  $u_C(0_+)$  – напряжение на ней непосредственно после коммутации.

В соответствии с невозможностью скачка напряжения на емкости

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) \quad (3)$$

Равенство (3) выражает собой второй закон коммутации.

### Докоммутационные и послекоммутационные начальные значения

Докоммутационными начальными значениями называют значения токов и напряжений непосредственно до коммутации (при  $t=0_-$ ); послекоммутационными начальными значениями – значения токов и напряжений непосредственно после коммутации (при  $t=0_+$ ).

### Некоторые особенности переходных процессов

Полное значение любой величины (тока, напряжения, заряда) равно сумме принужденной и свободной составляющих. Если среди корней характеристического уравнения есть комплексно сопряженные корни  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$  и значение угловой частоты свободных колебаний  $\omega_0$  почти равно угловой частоте  $\omega$  источника синусоидальной э.д.с. (источник питания), а коэффициент затухания  $\delta$  мал (цепь с малыми потерями), то сложение принужденной и свободной составляющих дает колебание, для которого характерно биение амплитуды.

Амплитуда результирующего колебания нарастает по экспоненциальному закону.

При наличии емкости (или емкостей) в схеме могут возникать большие начальные броски токов, в несколько раз превышающие амплитуды тока установившегося режима. Если  $\psi=90^\circ$ , то в первый момент после замыкания

рубильник ток равен  $\frac{U_m}{R_1}$ . При размыкании рубильников в индуктивных цепях возникают опасные увеличения напряжения на отдельных участках цепи.

### Переходные процессы, сопровождающиеся электрической дугой

Если переходный процесс вызывается размыканием рубильника в электрической цепи, содержащей индуктивности, то между расходящимися ножами рубильника при определенных условиях может возникнуть электрическая дуга при возникновении электрической дуги (искры) расчет переходного процесса усложняется и не может проводиться методами, изучаемыми в данной главе. Объясняется это тем, что сопротивление электрической дуги является нелинейной функцией протекающего через нее тока. В этом случае, если известна вольтамперная характеристика дуги, для

расчета переходных процессов могут применяться методы, излагаемые в приложении В.

### Опасные перенапряжения, вызываемые размыканием ветвей в цепях, содержащих индуктивность

При размыкании рубильников в электрических цепях, содержащих значительные индуктивности, на отдельных участках электрических цепей могут возникать напряжения, во много раз превышающие установившиеся. Напряжения, превышающие установившиеся, называют перенапряжениями. Они могут оказаться настолько значительными, что вызовут пробой изоляции и выведут из строя измерительную аппаратуру.

### Общая характеристика методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

Расчет переходных процессов в любой линейной электрической цепи состоит из следующих основных операций:

1. Выбор положительных направлений токов в ветвях цепи.
2. Определение значений токов и напряжений непосредственно до коммутации.
3. Составление характеристического уравнения и определение его корней.
4. Получение выражений для искомых токов и напряжений как функции времени.

Широко распространенными методами расчета переходных процессов являются:

- 1) Метод, получивший в литературе название классического;
- 2) Операторный метод;
- 3) Метод расчета путем применения интеграла Дюамеля.

Для всех этих методов перечисленные четыре операции, или этапы расчета, являются обязательными.

Для всех методов первые три операции (они уже были кратко рассмотрены) совершаются одинаково, и их нужно рассматривать, как общую для всех методов часть расчета.

Различие между методами имеет место на четвертом, наиболее трудоемком, этапе расчета

Наиболее широко применяются классический и операторный методу, реже используется метод расчета путем применения интеграла Дюамеля.

### Сравнение различных методов расчета переходных процессов

И классический и операторный методы расчета теоретически могут быть применены для решения задач любой сложности. Каким из них пользоваться, во многом зависит от навыка и привычки.

Однако бесспорно, что классический метод более физически прозрачен, чем операторный, в котором решение дифференциальных уравнения весьма сильно «механизировано».

Если при сравнении исходить из объема вычислительной работы, то практически решение уравнений первого и второго порядков для источников постоянной или синусоидальной э. д. с. или тока целесообразно проводить классическим методом, а решение уравнений третьего и более высоких порядков – операторным. Объясняется это тем, что чем выше порядок характеристического уравнения, тем более громоздкой и трудоемкой оказывается операция нахождения постоянных интегрирования в классическом методе.

Интеграл Дюамеля рекомендуется применять в тех случаях, когда напряжение изменяется по сложному закону во времени, например при наличии скачков напряжения или когда переходная проводимость  $g(t)$  и (или) воздействующее на схему напряжение заданы графически (в последнем случае интеграл Дюамеля берется путем численного интегрирования).

### ***Электрические цепи с распределенными параметрами.***

Каждый элемент электрической цепи (резистор, катушка, конденсатор) имеет конечные размеры, и его можно представить как совокупность малых однородных частей, в которых совершаются интересующие нас электромагнитные процессы- преобразование энергии в тепло, накопление энергии энергии в магнитном и электрическом полях. Иначе говоря, все устройства имеют распределенные параметры- сопротивление, индуктивность, емкость.

При изучении электрических цепей до сих пор мы не учитывали размеры устройств, предполагая, что параметры  $R$ ,  $L$ ,  $C$  сосредоточены, т.е. представляли в расчетной схеме каждый элемент в целом.

Такой подход к анализу электрических цепей принимают тогда, когда рассматривают и изучают внешние связи между элементами. В тех случаях, когда требуется выявить соотношения внутри устройства, соответствующий элемент рассматривается как объект с распределенными параметрами. Таким объектом может быть обмотка электрической машины, трансформатора, антенна радиотехнического устройства и др.

*Электрическая цепь с распределенными параметрами- это цепь, в которой сопротивления, проводимости, индуктивности и емкости распределены вдоль цепи.*

Наглядным примером цепи с распределенными параметрами является электрическая длинная линия.

### Уравнения длинной линии.

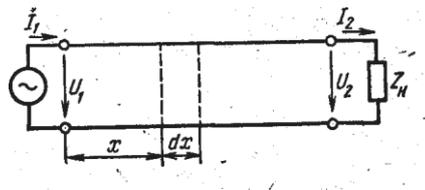
Длинные линии строят для передачи электрической энергии, для электросвязи (передачи информации). Их рассматривают как объекты с распределенными параметрами при низких частотах и длине в десятки и сотни километров.

В радиотехнике при высоких частотах распределение параметров по длине учитывают в более коротких участках проводов (единицы и доли метра), например в антеннах.

### Схемы замещения длинных линий.

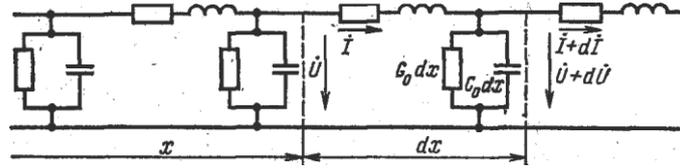
На рис. 26.1 изображена схем электрической цепи, состоящей из источника и приемника электрической энергии, связанных двухпроводной линией. Эту цепь можно рассматривать неразветвленной, с одинаковым током во всех ее элементах, если не учитывать двух обстоятельств: скорость распространения электромагнитных возмущений конечна: имеются токи, обусловленные емкостью между проводами (емкостный ток) и проводимостью изоляции (ток утечки через изоляцию).

**Рис.26.1**



В данном случае первое обстоятельство можно не учитывать, так как скорость распространения электромагнитных возмущений действительно велика (в вакууме равна скорости света). Емкостные токи и токи утечки пропорциональны напряжению между проводами; кроме того, емкостный ток увеличивается с ростом частоты, так как уменьшается емкостное сопротивление. Поэтому при высоком напряжении или большой частоте, а так же при большой длине линии емкостные токи и токи утечки становятся значительными по величине и их нельзя исключить из расчета.

Токи между проводами существуют на сколь угодно малом отрезке линии, поэтому ток в проводах уменьшается по мере удаления от начала линий.



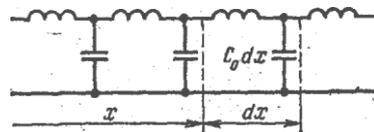
**Рис.26.2**

Вдоль линии напряжения между проводами тоже неодинаково. Оно уменьшается в направлении от начало к концу линии, так как растет падение напряжения, обусловленное активным и индуктивным сопротивлениями проводов.

Линия с равномерным распределением параметров называется однородной. Реальные линии можно считать однородными лишь приближенно, так как параметры их все же распределены неравномерно. Например, проводимость воздушной линии сосредоточена в основном в опорах, а благодаря провесу проводов емкость по отношению к земле вдоль пролета неодинакова.

В зависимости от целей и требуемой точности и расчета можно учитывать все четыре параметра или некоторое из них. Так, при рассмотрении линии электропередачи с напряжением до 35кВ и при частоте 50Гц часто не учитывают емкостные токи и токи утечки, т.е. считают равными нулю параметры  $C_0$  и  $G_0$ .

**Рис.26.3**



При высокой частоте (например, в радиотехнических устройствах) или при коротких импульсах напряжении в линиях возникающих от грозových разрядов, емкостные токи между проводами могут быть сравнительно большими и ими пренебрегать нельзя.

Вместе с тем при высокой частота и малой длине линии в отдельных случаях можно пренебречь активным сопротивлением  $R_0$  и проводимостью  $G_0$ .

Основные уравнения длинной линии.

При синусоидальном напряжении источника питания напряжения и ток в линии на любом расстоянии  $x$  от ее начала изменяются во времени. Вместе с тем напряжение и ток изменяются вдоль линии. Установившийся режим в длинной линии представляется довольно сложной пространственно-временной картиной, для изучения которой необходимо получить аналитическую зависимости напряжения и тока от двух независимых переменных- времени и расстояния.

Падение напряжение в элемента длины  $dx$  линии

$$U - (U + dU) = -dU = IR_0 dx + j\omega L_0 dx.$$

Разность токов в начале и конце того же элемента равна сумме тока утечки и емкостного тока:

$$I - (I + dI) = -dI = UG_0 dx + Uj\omega C_0 dx.$$

Из этих выражений получают дифференциальные уравнения однородной линий, в которых входят комплексы токов и напряжении, изменяющихся во времени по синусоидальному закону, а также их производные по переменной координате  $x$ :

$$-\frac{dU}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)I = \underline{Z}_0 I;$$

$$-\frac{dI}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)U = \underline{Y}_0 U;$$

где  $\underline{Z} = R_0 + j\omega L_0$  - полное сопротивление единицы длины линии (определяется продольными параметрами линии);  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  -полная проводимость единицы длины линии (определяется поперечными параметрами линии).

Продольные  $R_0, L_0$  и поперечные  $G_0, C_0$  параметры линии характеризуют совершенно различные физические явление, поэтому между собой несвязанны.

### Установившийся режим в длиной линии без потерь

Линия без потерь, как уже было отмечено, не имеет активных сопротивления  $R_0$  и проводимости  $G_0$ .

В радиотехнике длинные линии с малым потерями встречаются часто, поэтому рассмотрение линии при  $R_0 = 0$  и  $G_0 = 0$  имеет практическое значение.

### Уравнения длинной линии без потерь.

Для линии без потерь коэффициент затухания  $\delta = 0$ , а коэффициент распространения волны оказывается равным коэффициенту фазы:

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad \underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Поэтому график распределения напряжения вдоль линии в некоторый фиксированный момент времени представляет собой синусоиду. Амплитуда напряжения вдоль линии остается постоянной.

Волновое сопротивление

$$Z_c = \sqrt{L_0 / C_0 Z_c} \quad \text{при } \theta = 0.$$

Уравнения напряжения и тока в линии без потерь, согласно уравнениям,

$$\left. \begin{aligned} U &= \underline{A}_1 e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{j\beta x}; \\ I &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-j\beta x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{j\beta x}. \end{aligned} \right\}$$

После преобразования из уравнений получим

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1 \cos \beta x + j I_1 \underline{Z}_c \sin \beta x; \\ I &= I_1 \cos \beta x - j \frac{U_1}{\underline{Z}_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\}$$

Из этих уравнений можно также получить выражения и тока в любой точке линии, если известны напряжения  $U_2$  и ток  $I_2$  в конце линии, при условии отсчета расстояния от конца линии:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_2 \cos \beta x + j I_2 \underline{Z}_c \sin \beta x; \\ I &= I_2 \cos \beta x + j \frac{U_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\}.$$

### Холостой ход.

При холостом ходе линии ( $I_2 = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} U &= U_2 \cos \beta x; \\ I &= j \frac{U_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta x = \frac{U_2}{\underline{Z}_c} e^{j90^\circ} \sin \beta x. \end{aligned} \right\}$$

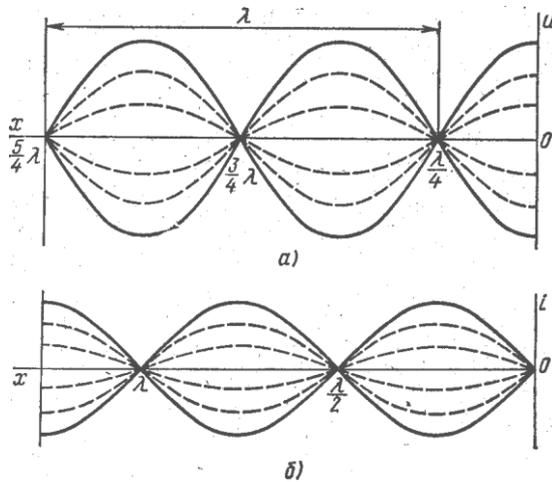
Напряжение и ток вдоль линии в любой момент времени распределены по синусоидальному закону, причем в пунктах, где напряжение равно нулю, ток имеет наибольшую величину, а в пунктах с наибольшим напряжением ток равен нулю.

Точки линии, в которых напряжение или ток равны нулю, называются узлами, а точки с наибольшей величиной напряжения или тока - пучностями.

Таким образом, узлы напряжения по месту расположения на линии совпадают с пучностями тока, а пучности напряжения - с узлами тока.

Положение узлов напряжения и пучностей тока найдем, приравняв нулю напряжение в первом уравнении:  $U = 0$  при  $\beta x = k + \pi/2$ , где  $k$  – любое целое число или нуль, т.е. при  $\beta x = \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{3}{2}\pi$ ;  $\frac{5}{2}\pi$  и т.д.

Рис.26.6



Положение на линии узлов тока и пучностей напряжения определяется из второго уравнения при  $I = 0$ .

Напряжение и ток, распределялись вдоль линии по синусоидальному закону без затухания, по такому же закону изменяются во времени.

### Короткое замыкание.

Аналогичная картина наблюдается и при коротком замыкании конца линии без потерь. Отличие электромагнитных процессов в линии без потерь. Отличие электромагнитных процессов в линии без потерь в режимах холостого хода и короткого замыкания состоит лишь в том, что изменяется расположение пучностей и узлов напряжения и тока по длине линии: в тех пунктах, где при холостом ходе находятся пучности напряжения и узлы тока, при коротком замыкании обнаруживаются пучности тока и узлы напряжения. В частности, в конце разомкнутой линии имеется пучность напряжения и узел тока ( $I_2 = 0$ ), а в конце короткозамкнутой линии имеется пучность тока и узел напряжения ( $U_2 = 0$ ).

### Волновое сопротивление. Длина волны

Уравнения запишем в тока виде:

$$u = u_{\text{ПАД}} + u_{\text{ОТР}};$$
$$i = U_{\text{ПАД}} / Z_C - U_{\text{ОТР}} / Z_C = i_{\text{ПАД}} - i_{\text{ОТР}}.$$

Отсюда

$$Z_C = u_{\text{ПАД}} / i_{\text{ПАД}} = u_{\text{ОТР}} / i_{\text{ОТР}}.$$

Волновое сопротивление линии выражается отношением напряжения к току падающих волн или аналогичным отношением для отраженных волн.

Волновое сопротивление линии можно определить через входные сопротивления при холостом ходе и коротком замыкание:

$$Z_C = \sqrt{Z_X Z_K}.$$

Большой интерес представляет также расстояние, на которое бегущая волна распространяется за время одного периода синусоидально изменяющегося напряжения или тока.

Фазовая скорость постоянна, поэтому

$$x = \omega t / \beta.$$

*Путь, пройденный волной за время периода  $T = 2\pi / \omega$ , называется длиной волны:*

$$\lambda = vT = \omega T / \beta = 2\pi / \beta.$$

В линии без потерь фазовая скорость

$$v = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 C_0},$$

а длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{f \sqrt{L_0 C_0}}.$$

Фазовая скорость электромагнитной волны в воздушной линии без потерь равна скорости света.

В линиях дальних передач с номинальным напряжением 500кВ и более изменения величины напряжения вдоль линии становятся заметными и приходится принимать меры к его выравниванию. С увеличением частоты длина волны уменьшается. В технике связи, где применяются высокие частоты, длина волны может быть во много раз меньше длины линии.

Нагрузочные режимы длиной линии без потерь.

Кроме крайних режимов холостого хода и короткого замыкания для практики еще более интересными являются нагрузочные режимы, когда в конце линии включается приемник электромагнитной энергии. Из различных нагрузочных режимов рассмотрим режимы с согласованной и несогласованной активными нагрузками.

**Электрические и магнитные цепи содержащие линии с распределенными параметрами.**

### Основные определения

Электрическими линиями с распределенными параметрами называют такие линии, в которых ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной точки (сечения) линии к другой, соседней точке.

Под магнитными линиями с распределенными параметрами понимают такие линии, магнитный поток и магнитное напряжение вдоль которых непрерывно меняются при переходе от одной точки линии к соседней.

Эффект непрерывного изменения тока (или потока) и коэффициент непрерывного изменения электрического (магнитного) напряжения вдоль линии имеют место вследствие того, что линии обладают распределенными продольными и поперечными сопротивлениями

Сопротивления  $Z_x, Z_2, Z_3, \dots$  называют продольными **сопри** давлениями, в них включены сопротивления и прямого и обратного проводов; сопротивления  $Z_4, Z_5, Z_e, \dots$  называют поперечными сопротивлениями.

. В результате утечки тока через сопротивление  $Z_4$  ток  $i_2$  не равен току  $i_1$ , Аналогично ток  $i_3$  не равен току  $i_2$  и т. д. Напряжение между точками  $a$  и  $b$  не равно напряжению между точками  $c$  и  $d$  и т. д.

В электрических линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления образованы активными сопротивлениями проводов линии и индуктивностями двух противостоящих друг другу участков линии длиной  $dx$ . Поперечные сопротивления состоят из сопротивлений утечки, появляющейся вследствие несовершенства изоляции между проводами линии, и емкостей, образованных противостоящими друг другу элементами (участками) линии. В магнитных линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления представляют собой магнитные сопротивления самих магнитных стержней, образующих магнитную линию, а поперечные сопротивления обусловлены утечкой магнитного потока по воздуху между противостоящими друг другу участками линии.

Линию с распределенными параметрами называют однородной, если равны друг другу все продольные сопротивления участков линии одинаковой длины и если равны друг другу все поперечные сопротивления участков линии одинаковой длины. Так, участок линии рис. 342,  $a$  будет однородным, если  $Z_1=Z_2=Z_3=\dots$  и  $Z_4=Z_5=Z_e$ .

Линию с распределенными параметрами называют неоднородной, если продольные сопротивления в ней различны или если поперечные сопротивления неодинаковы.

Кроме того, линии с распределенными параметрами могут быть подразделены на две большие группы: нелинейные и линейные. В нелинейных линиях с распределенными параметрами продольные и (или) поперечные сопротивления являются функциями протекающих по ним токов линейные продольные и поперечные сопротивления не являются функциями протекающих через них токов.

В качестве примера нелинейной электрической линии с распределенными параметрами может быть названа электрическая линия передачи высокого напряжения при наличии между проводами линии тихого электрического

разряда — явление короны на проводах. В этом случае емкость между противостоящими друг другу участками линии является функцией напряжения между этими участками линии.

В качестве примера нелинейной магнитной линии с распределенными параметрами может быть названа линия, образованная параллельно расположенными магнитными сердечниками, которые в процессе работы линии могут насыщаться. Когда говорят о линии с распределенными параметрами, то обычно этот термин мысленно связывают с мощными линиями передачи электрической энергии на большие расстояния, с телефонными и телеграфными воздушными и кабельными линиями, с рельсовыми линиями автоблокировки на железнодорожном транспорте, с антеннами в радиотехнике и другими родственными линиями и установками.

### Составление дифференциальных уравнений для однородной линии с распределенными параметрами

Пусть  $R_0$  — продольное активное сопротивление единицы длины линии,  $L_0$  — индуктивность единицы длины линии,  $C_0$  — емкость единицы длины линии и  $G_0$  — поперечная проводимость единицы длины линии. Подчеркнем, что поперечная проводимость  $G_0$  не является обратной величиной по отношению к продольному сопротивлению  $R_0$ .

Разобьем линию на участки длиной  $dx$   $x$  — это расстояние, отсчитываемое от начала линии. На длине  $dx$  активное сопротивление равно  $R_0 dx$ , индуктивность —  $L_0 dx$ , проводимость утечки —  $G_0 dx$  и емкость —  $C_0 dx$ . Обозначим ток в начале рассматриваемого участка линии через  $I$  и напряжение между проводами линии в начале участка  $u$ . И ток, и напряжение являются в общем случае функциями расстояния вдоль линии  $x$  и времени  $t$ . Поэтому в дальнейшем в уравнениях будут участвовать частные производные от  $u$  и от  $i$  по времени  $t$  и по расстоянию  $X$ .

Если для некоторого момента времени  $t$  ток в начале рассматриваемого участка равен  $i$ , то в результате утечки тока через поперечный элемент ток в конце участка для того же момента времени будет равен  $i + \frac{di}{dx} dx$ , где

$\frac{di}{dx}$  — скорость изменения тока в направлении  $x$ . Скорость, умноженная на расстояние  $dx$ , дает приращение тока на пути  $dx$ .

Аналогично, если напряжение в начале участка  $u$ , то в конце участка для того же момента времени напряжение равно  $u + \frac{du}{dx} dx$ .

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, образованного участком линии длиной  $dx$ , обойдя его по часовой стрелке:

$$-u + R_0 dx i + L_0 dx \frac{di}{dt} + u + \frac{du}{dx} dx = 0.$$

После упрощения и деления уравнения на  $dx$  получим

$$-\frac{du}{dx} = L_0 \frac{di}{dt} + R_0 i. \quad (1).$$

По первому закону Кирхгофа,

$$i = di + i + \frac{di}{dx} dx. \quad (2).$$

Ток  $di$  равен сумме токов, проходящих через проводимость  $G_0 dx$  и через емкость  $C_0 dx$ :

$$di = (u + \frac{du}{dx} dx) G_0 dx + \frac{d}{dt} C_0 dx(dx).$$

Пренебрегаем слагаемыми второго порядка малости, тогда

$$di = u G_0 dx + C_0 dx \frac{du}{dt}. \quad (3).$$

Подставим (3) в (2) упростим и поделим уравнение на  $dx$ :

$$-\frac{di}{dx} = G_0 u + C_0 \frac{du}{dt}. \quad (4).$$

Уравнения (1) и (4) являются основными дифференциальными уравнениями для линии с распределенными параметрами.

### Решение уравнений линии с распределенными параметрами при установившемся синусоидальном процессе

Пусть напряжение и ток в линии изменяются по синусоидальному закону во времени. Воспользуемся символическим методом.

Изображение тока  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$  равно  $I e^{j\omega t}$ . Здесь  $I = \frac{I_m e^{j\varphi_i}}{\sqrt{2}}$ .

Изображение напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  равно  $U e^{j\omega t}$ , где  $U = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{\sqrt{2}}$ .

Комплексы  $U$  и  $I$  являются функциями расстояния  $x$ , но не являются функциями времени. Множитель  $e^{j\omega t}$  есть функция времени  $t$ , но не зависит от  $x$ .

Представление изображений тока и напряжения в виде произведения двух множителей, из которых один является функцией только  $x$ , а другой — функцией только  $t$ , дает возможность перейти от уравнений в частных производных к уравнениям в простых производных. Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= e^{j\omega t} \frac{dU}{dx}; \\ L_0 \frac{di}{dt} &= L_0 I \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega L_0 I e^{j\omega t}; \end{aligned} \right\} \quad (5).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dx} &= e^{j\omega t} \frac{dI}{dx}; \\ C_0 \frac{du}{dt} &= j\omega C_0 U e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (6).$$

Подставим (5) и (6) в (1) и в (4) и сократим в полученных уравнениях множитель  $e^{j\omega t}$ . Получим

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= Z_0 I; \\ -\frac{dI}{dx} &= Y_0 U, \end{aligned} \quad (7). \quad (8).$$

где

$$\begin{aligned} Z_0 &= R_0 + j\omega L_0; \\ Y_0 &= G_0 + j\omega C_0. \end{aligned} \quad (9).(10).$$

Решим систему уравнений (7) и (8) относительно  $U$ . С этой целью продифференцируем (7) по  $x$ :

$$-\frac{d^2 U}{dx^2} = Z_0 \frac{dI}{dx}. \quad (11).$$

В (11) вместо  $\frac{dI}{dx}$  подставим правую часть уравнения (8)

Получим

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = Z_0 Y_0 U. \quad (12).$$

Уравнения (12) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение его:

$$U = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}. \quad (13).$$

Комплексные числа  $A_1$  и  $A_2$  есть постоянные интегрирования, которые в дальнейшем определим через напряжение и ток в конце линии.

$$\text{Коэффициент} \quad \gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} \quad (14).$$

принято называть *постоянной распространения*;  $\gamma$  – комплексное число, и потому его можно представить в таком виде:

$$\gamma = \beta + j\alpha, \quad (15).$$

здесь  $\beta$  – коэффициент затухания; забега несколько вперед, скажем, что он характеризует собой затухание падающей волны на единицу длины линии (на 1 км);  $\alpha$  – коэффициент фазы; он характеризует изменение фазы падающей волны на единицу длины линии (на 1 км или м):

$$[\gamma] = [\beta] = [\alpha] = 1/\text{км}.$$

Ток  $I$  найдем из уравнения (7):

$$I = -\frac{1}{Z_0} \frac{dU}{dx} = \frac{A_2 e^{-\gamma x} - A_1 e^{\gamma x}}{\frac{Z_0}{\gamma}}. \quad (16).$$

Величину  $\frac{Z_0}{\gamma} = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$ , имеющую размерность сопротивления, обозначают  $Z_C$  и называют *волновым сопротивлением*;

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = z_C e^{j\varphi_C}, \quad (17).$$

где  $z_C$  – модуль, а  $\varphi_C$  – аргумент волнового сопротивления  $Z_C$ .

Следовательно,

$$I = \frac{A_2}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{A_1}{Z_C} e^{\gamma x}.$$

## Переходные процессы в нелинейных электрических цепях.

Известно несколько различных приемов и методов расчета переходных процессов в нелинейных цепях. В данной главе будут обсуждаться только те из них, которые представляют наибольший интерес.

Рассматриваемые методы анализа и расчета переходных процессов в нелинейных цепях могут быть классифицированы следующим образом: ;

- 1) по виду основных операций, которые необходимо выполнять для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений,— на графические (графо-аналитические) и аналитические;
- 2) по характеру величины, для которой производится расчет,— на расчет по мгновенным значениям токов и напряжений и на расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений.

Под графическими (графо-аналитическими) методами расчета понимают такие методы, в которых основными операциями при определении зависимости от времени искомого тока и напряжений являются графические построения, нередко сопровождаемые и некоторыми вспомогательными числовыми подсчетами.

Важно подчеркнуть, что в графических (графо-аналитических) методах расчета характеристики нелинейных сопротивлений обычно не требуется выражать аналитически.

В данной, главе рассмотрены следующие графические методы:

1. Метод, основанный на графическом подсчете определенного интеграла (
2. Метод Волынкина.

Аналитическими методами называют такие методы расчета, в которых основной операцией при определении зависимостей искомого тока и напряжений от времени является точное или приближенное аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений цепи, в которые

подставляются аналитические выражения характеристик нелинейных сопротивлений.

Далее рассмотрены следующие аналитические методы:

1. Метод интегрируемой нелинейной аппроксимации.
2. Метод кусочно-линейной аппроксимации.
3. Метод медленно меняющихся амплитуд.

Графические методы имеют следующие преимущества перед аналитическими:

1) в них не требуется, как правило, выражать характеристики нелинейных сопротивлений аналитически, и поэтому они свободны от погрешностей, связанных с аналитическим представлением характеристик нелинейных сопротивлений;

2) они довольно просто позволяют учесть гистерезис и другие сложные нелинейные зависимости.

В свою очередь аналитические методы имеют перед графическими свои преимущества. Из них основным является то, что они дают возможность получить решение в общем виде, а не для какого-то одного конкретного сочетания параметров. Получить решение в общем виде является желательным потому, что анализ его позволяет выяснить все особенности процесса при изменении всех параметров.

Как уже упоминалось, все методы расчета могут быть подразделены также на две подгруппы: на расчет по мгновенным значениям токов и напряжений и на расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений.

### Метод расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях.

Замена характеристики нелинейного сопротивления отрезками прямых Линий дает возможность перейти от нелинейного дифференциального уравнения к нескольким линейным уравнениям, отличающимся друг от друга лишь значениями коэффициентов.

Каждое из линейных уравнений справедливо для того интервала времени, в течение которого рабочая точка перемещается по данному линеаризованному участку. Метод применим к цепям, содержащим источники постоянной и (или) синусоидальной ЭДС, к цепям первого и более высоких порядков.

Для сложных нелинейных цепей с источником (источниками) синусоидальной ЭДС. основная трудность расчета данным методом заключается в определении постоянных интегрирования и времени работы на каждом линейном участке, исходя из законов коммутации. В сложных цепях неизвестные определяют обычно из трансцендентных уравнений. Для решения трансцендентных уравнений часто применяют математические счетные машины.

Впервые идея метода была высказана русским физиком Н. Д. Папалекси в 1912 г.

## Магнитная цепь.

Магнитной цепью называют совокупность м. д. с, ферромагнитных тел или каких-либо иных тел или сред, по которым замыкается магнитный поток

### Разновидности магнитных цепей.

Магнитные цепи могут быть подразделены на неразветвленные и разветвленные. Примером неразветвленной цепи может служить цепь, показанная на рис. 67. Разветвленные цепи делятся на симметричные и несимметричные. Магнитная цепь рис. 68 симметрична: в ней поток  $\Phi_1$  будет равняться потоку  $\Phi_2$ , если обе части ее, расположенные слева и справа от вертикальной пунктирной линии, будут одинаковы в геометрическом отношении, изготовлены из одного и того же материала и если  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ .

Рис.67.

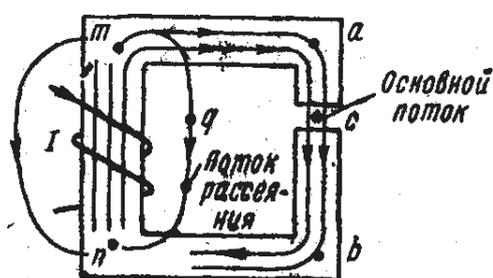
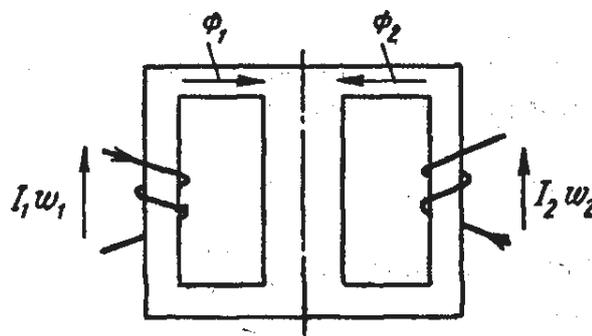


рис. 68.



Достаточно сделать  $I_1\omega_1 \neq I_2\omega_2$  или изменить направление тока в одной из обмоток, или сделать воздушный зазор в одном из крайних стержней магнитопровода, чтобы магнитная цепь рис. 68 стала несимметричной. В несимметричной цепи рис. 68 поток  $\Phi_1$ , как правило, не равен  $\Phi_2$ .

### Теория электромагнитного поля.

#### Основные понятия

Теория электромагнитного поля представляет собой учение об электрических и магнитных явлениях, о теоретических положениях и законах, которым подчиняются эти явления, и о вытекающих из них методах расчета.

Изложение основных свойств и методов расчета полей проводится путем перехода от более простых типов полей к более сложным. В соответствии с этим вначале рассматриваются неизменные во времени поля — электростатическое поле, электрическое поле постоянного тока в

проводящей среде, магнитное поле постоянного тока — и лишь после этого переходим к изучению переменного электромагнитного поля. Изучение всех этих видов полей расширяет физические представления о поле, известные из курса физики, и способствует более глубокому пониманию процессов, происходящих в электротехнических установках. Оно также важно с прикладной точки зрения, поскольку дает возможность решать многие задачи, имеющие существенное значение не только для теории электрических цепей, но и далеко выходящие за рамки теории цепей и имеющие самостоятельное значение, как, например, задачи об излучении и канализации энергии высокой частоты.

Ознакомление с материалом, излагаемым в разделе «Электростатическое поле», позволяет понять, например, в каких условиях работает электрическая изоляция в той или иной электрической установке, какое влияние на электрическую прочность оказывают электрические свойства диэлектрика, изменение этих свойств от точки к точке, посторонние включения и т. п. Изучение этого раздела позволяет, например, определять такие интегральные величины, как собственные и частичные емкости — понятия, широко используемые в теории электрических цепей.

Изучение раздела «Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде» дает возможность решать, например, следующие практические задачи: находить распределение потенциалов и плотностей токов в заземляющих установках, токи утечки в устройствах с несовершенной изоляцией, распределение тока в морской воде в установках для траления, определять такие интегральные величины, как проводимость и сопротивление между электродами сложной конфигурации и т. п.

### Определение переменного электромагнитного поля.

Под переменным электромагнитным полем понимают совокупность изменяющихся во времени и взаимно связанных друг с другом электрического и магнитного полей.

Переменное электромагнитное поле является одним из видов материи. Оно обладает энергией, массой и количеством движения и может превращаться в другие виды материи. Любые возмущения поля в диэлектрике с огромной скоростью, равной примерно  $3 \cdot 10^8$  м/сек, передаются на большие расстояния.

При исследовании процессов в переменном электромагнитном поле пользуются уравнениями, которые принято называть уравнениями Максвелла.

Систему уравнений Максвелла образуют четыре уравнения \*,

1. Уравнение, выражающее связь между ротором напряженности магнитного поля и плотностью тока в той же точке, поля. Это уравнение называют первым уравнением Максвелла.

2. Уравнение, которое дает связь между ротором напряженности электрического поля и скоростью изменения магнитного поля в той же точке поля. Это уравнение называют вторым уравнением Максвелла.

3. Уравнение  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , выражающее принцип непрерывности магнитного потока.

4. Уравнение  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_A}$ , выражающее связь между истоком напряженности электрического поля и плотностью свободных зарядов в той же точке поля.

### Уравнения Максвелла для проводящей среды.

Рассмотрим особенности распространения электромагнитной волны в проводящей среде с проводимостью  $\gamma$  и магнитной проницаемостью  $\mu_a$ .

Обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени  $E$  и  $H$ :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + j\omega \epsilon_a \vec{E}$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}.$$

В проводящей среде даже при весьма высоких частотах произведение  $\omega \epsilon_a$  много меньше проводимости  $\gamma$ . Поэтому с большой степенью точности слагаемым  $j\omega \epsilon_a \vec{E}$  в первом уравнении Максвелла можно пренебречь.

Таким образом, первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}.$$

Эти два уравнения представляют собой уравнения с двумя неизвестными  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Проведем их совместное решение. С этой целью возьмем ротор от уравнения;  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \gamma \operatorname{rot} \vec{E}$ .

Учтем, что  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$  и поэтому  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} = 0$ . Вместо  $\operatorname{rot} \vec{E}$  в соответствии с подставим  $-j\omega \mu_a \vec{H}$ . Получим

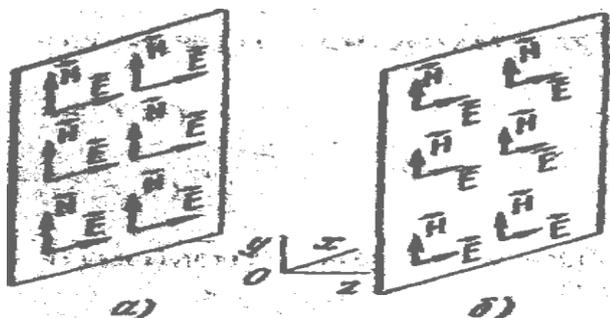
$$\nabla^2 \vec{H} = j\omega \gamma \mu_a \vec{H}.$$

Уравнение является дифференциальным относительно  $\vec{H}$ . В самом общем случае, когда  $\vec{H}$  зависит от всех трех или даже только от двух координат решение довольно сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением решения уравнения для частного случая - для плоской электромагнитной волны.

## Плоская электромагнитная волна.

Под *плоской электромагнитной волной* понимают такую волну, для которой характерно, что во всех точках плоскости (например, плоскости  $хоу$ ,) перпендикулярной направлению распространения волны (оси  $z$ ), напряженность электрического поля  $E$  в данный момент времени одинакова (по величине и направлению) и лежит в плоскости  $хоу$ , точно так же и напряженность магнитного поля  $H$  во всех точках плоскости  $хоу$  одинакова и лежит в плоскости  $хоу$ . На этом рисунке изображены для одного и того же момента времени векторы  $E$  и  $H$  в двух параллельных плоскостях, перпендикулярных оси  $z$  декартовой системы координат. Во всех точках первой плоскости (рис. 468, а) напряженность электрического (магнитного) поля одинакова по величине и по направлению. Во всех точках второй плоскости (рис. 468, б) напряженность электрического (магнитного) поля также одинакова по величине и по направлению, но она не равна напряженности поля в первой плоскости.

Рис.468.



В силу самого определения плоской волны

$$\frac{d\vec{H}}{dx} = 0, \quad \frac{d\vec{H}}{dy} = 0, \quad \frac{d\vec{E}}{dx} = 0, \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{E}}{dy} = 0.$$

В плоской волне  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  являются функциями только одной координаты, в нашем случае функцией только  $z$ .

### Электростатическое поле.

#### Определение электростатического поля

Электромагнитное поле представляет собой особый вид материи; оно является носителем энергии и обладает характерными для него электрическими и магнитными свойствами.

Электростатическое поле — это частный вид электромагнитного поля. Оно создается совокупностью электрических зарядов, неподвижных в пространстве по отношению к наблюдателю и неизменных во времени \*.

В дальнейшем, как правило, будем иметь дело с полем, создаваемым в однородной и изотропной среде, т. е. в такой среде, электрические свойства которой одинаковы для всех точек поля и не зависят от направления. В ином случае будут делаться соответствующие оговорки.

Электростатическому полю присуща способность воздействовать на помещенный в него электрический заряд с механической силой, прямо пропорциональной величине этого заряда.

В основу определения электростатического поля положено механическое его проявление. Оно было обнаружено много лет назад и нашло свое выражение в известном законе Кулона (1785).

### Закон Кулона

Два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой  $\vec{F}$ , прямо пропорциональной произведению зарядов  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $R$  между ними. Эта сила направлена по линии, соединяющей точечные заряды. Если заряды имеют одинаковые знаки, то они стремятся оттолкнуться друг от друга; заряды противоположных знаков стремятся сблизиться:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0,$$

где  $\vec{R}_0$  – единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды.

Рис.397.



При использовании СИ и кратных долей единиц этой системы расстояние  $R$  обычно измеряют в метрах ( $m$ ), заряды — в кулонах ( $к$ ); электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$ ; тогда силу получают в ньютонах. Хотя в формулировке закона Кулона и упоминаются «точечные» заряды, но это не значит, что взаимодействующие друг с другом заряды расположены на телах, имеющих бесконечно малые размеры. Когда говорят о точечных зарядах, то имеют в виду следующее: линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами.

Основные величины, характеризующие электростатическое поле: напряженность и потенциал

В электростатическом поле основными величинами, характеризующими его электрическое поле, является напряженность  $E$  и потенциал  $\phi$ .

Напряженность электрического поля есть величина векторная, определяемая в каждой точке и величиной и направлением! потенциал является величиной скалярной. Значение потенциала определяется в каждой точке поля некоторым числом-

Электрическое поле определено, если известен закон изменения  $E$  или  $\phi$  во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый (неподвижный) положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда  $q$  и определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

*Напряженность численно равна силе, действующей на заряд по величине равный единице.*

В том случае, когда поле создается несколькими зарядами ( $q_1, q_2, q_3, \dots$ ), напряженность поля равна геометрической сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности:

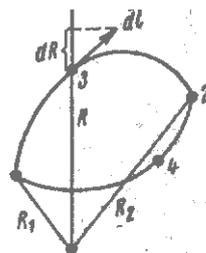
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

Другими словами, при расчете электрического поля применим метод наложения.

*Потенциал произвольной точки поля  $I$  может быть определен как работа, совершаемая силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен нулю.*

За точку, имеющую нулевой потенциал, может быть принята любая точка поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяются совершенно однозначно.

Рис.398.



Часто принимают, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Поэтому, в особенности в курсах физики, распространено определение потенциала как работы, совершаемой силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l}.$$

Часто считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли (земля в условиях электростатики есть проводящее тело, поэтому безразлично, где именно — на поверхности земли или в толще ее — находится эта точка).

### Электростатическое поле — поле потенциальное.

Составим выражение для разности потенциалов в поле точечного заряда. С этой целью положим, что в точке  $m$  рис. 398 находится положительный точечный заряд  $q_1$  создающий поле, а из точки 1 в точку 2 через промежуточную точку 3 перемещается единичный положительный заряд  $q=1$ .

Обозначим:  $R_1$ -расстояние от точки  $m$  до исходной точки 1;  $R_2$ -расстояние от точки  $m$  до конечной точки 2;  $R$  — расстояние от точки  $m$  до произвольной точки 3 на пути 132. Направление напряженности поля  $\vec{E}$  и направление элемента пути  $d\vec{l}$  в промежуточной точке 3 показано на рис. 398. Скалярное произведение  $E d\vec{l} = E dR$ , где  $dR$  есть проекция элемента пути  $d\vec{l}$  на направление радиуса, соединяющего точку  $m$  с точкой 3

Таким образом, *разность потенциалов между исходной и конечной точками пути (точками 1 и 2) зависит только от положения этих точек и не зависит от пути, по которому происходило перемещение из исходной точки в конечную точку.* Другими словами, если перемещение из точки 1 в точку 2 будет происходить по какому-то другому пути, например по пути 142, то разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , полученная в этом случае, будет равна разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , при перемещении из точки 1 в точку 2 по пути 132.

*В электростатическом поле линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый вдоль любого замкнутого пути, равен нулю.*

Поля, для которых выполняются подобного рода соотношения, называют *потенциальными*. Потенциальными являются не только электростатические поля, но и все гравитационные поля (поля сил тяготения между материальными телами), установившиеся температурные поля около нагретых тел и т. д.

### Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа.

Уравнения Пуассона и Лапласа являются основными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной

форме. Действительно, известно что  $\vec{E} = -grad\varphi$ . В то же время согласно теореме Гаусса

$$div\vec{E} = \frac{\rho_{СВОБ}}{\epsilon_A}. \quad (1).$$

Подставив в (1)  $E$  из (1.6), получим

$$div\vec{E} = div(-grad\varphi) = \frac{\rho_{СВОБ}}{\epsilon_A}.$$

Вынесем минус за знак дивергенции:

$$divgrad\varphi = -\frac{\rho_{СВОБ}}{\epsilon_A}.$$

Вместо того чтобы писать  $grad\varphi$ , запишем его эквивалент  $\nabla\varphi$ . Вместо  $div$  напишем  $\nabla$ . Тогда

$$\nabla(\nabla\varphi) = -\frac{\rho_{СВОБ}}{\epsilon_A}, \quad (6^1).$$

или

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_{СВОБ}}{\epsilon_A}. \quad (6).$$

Уравнение (6) называют уравнением Пуассона. Частный вид уравнения Пуассона, когда  $\rho_{СВОБ} = 0$ , называют уравнением Лапласа. Уравнение Лапласа записывают так:

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (7).$$

Оператор  $\nabla^2 = div\ grad$  называют оператором Лапласа, или лапласианом, и иногда обозначают еще символом  $\Delta$ . Поэтому можно встретить и такую форму записи уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{СВОБ}}{\epsilon_A}.$$

Раскроем  $\nabla^2\varphi$  в декартовой системе координат. С этой целью произведение двух множителей  $\nabla$  и  $\nabla\varphi$  запишем в развернутом виде:

$$\nabla(\nabla\varphi) = \left(i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}\right)\left(i\frac{d\varphi}{dx} + j\frac{d\varphi}{dy} + k\frac{d\varphi}{dz}\right).$$

Произведем почленное умножение и получим

$$\nabla^2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Таким образом, уравнение Пуассона в декартовой системе координат записывают следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho_{\text{СВОБ}}}{\varepsilon}. \quad (8).$$

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0. \quad (9).$$

Приведем без вывода выражения  $\nabla^2\varphi$  в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r} * \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} * \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad (10).$$

в сферической системе координат:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{R^2} * \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d\varphi}{dR} \right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \left( \sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} * \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}. \quad (11).$$

Уравнение Пуассона дает связь между частными производными второго порядка от  $\varphi$  в любой точке поля и объемной плотностью свободных зарядов в этой точке поля. В то же время потенциал  $\varphi$  в какой-либо точке поля зависит от всех зарядов, создающих поле, а не только от величины свободного заряда, находящегося в данной точке.

Уравнение Лапласа (1780г.) первоначально было применено для описания потенциальных полей небесной механики и впоследствии было использовано для описания электрических полей. Уравнение Пуассона применяют при исследовании потенциальных полей (электрических и магнитных) с 1820г.

Рассмотрим вопрос о том, как в общем виде может быть записано решение уравнения Пуассона.

Положим, что в объеме  $V$  есть объемные ( $\rho$ ), поверхностные ( $\sigma$ ) и линейные ( $\tau$ ) заряды. Эти заряды представим в виде совокупностей точечных зарядов:  $\rho dV$ ,  $\sigma ds$ ,  $\tau dl$ ;  $dV$ -элемент объема,  $ds$ -элемент заряженной поверхности,  $dl$ -элемент длины заряженной оси. Составляющая потенциала  $d\varphi$  в некоторой точке пространства, удаленной от  $\rho dV$  на расстояние  $R$ , в соответствии с формулой равна  $\frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 R}$ .

Составляющие потенциала от поверхностного и линейного зарядов, рассматривая их как точечные, определим аналогичным образом:

$$\frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_A R} \text{ и } \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_A R}.$$

Полное значение  $\varphi$  определим как сумму (интеграл) составляющих потенциала от всех зарядов в поле:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_A} \int_V \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_A} \int_S \frac{\sigma ds}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_A} \int_L \frac{\tau dl}{R}.$$

### Метода расчета полей.

#### Общая характеристика задач электростатики и методов их решения.

В зависимости от того, что задано и что определяется, задачи электростатики могут быть разделены на три типа задач.

*Задача первого типа.* По заданному закону распределения потенциала в пространстве  $\varphi(x, y, z)$  найти распределение свободных зарядов, вызвавших поле. Такого рода задачи могут быть решены при помощи уравнения Пуассона. Это наиболее простой тип задач;  $-\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_A}$  в данной точке поля

согласно уравнению Пуассона равняется сумме частных производных второго порядка от  $\varphi$ , в которую подставляют координаты данной точки поля. Одна из задач первого типа рассмотрена в примере.

*Задача второго типа.* Задан закон распределения свободных зарядов в пространстве в функции координат  $\rho_{\text{своб}}(x, y, z)$ . Найти закон изменения потенциала в пространстве  $\varphi_{\text{своб}}(x, y, z)$ . Эта задача является обратной по отношению к первой и значительно сложнее ее. Принципиально задача состоит в решении уравнения Пуассона относительно  $\varphi$ , т. е. в решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных.

Задачи первого и второго типов практически встречаются редко. В подавляющем большинстве приходится иметь дело с задачами третьего типа.

*Задача третьего типа.* Известны потенциалы (или полные заряды) и геометрия тел, создающих поле. Требуется найти закон изменения  $E$  или  $\varphi$  во всех точках поля.

Если среда, в которой создано поле, является неоднородной, то ее подразделяют на однородные области и решение уравнения Лапласа производят для каждой области в отдельности. Основная трудность задачи состоит в том, что хотя полные заряды тел и известны, но с какой плотностью на отдельных участках заряженного тела распределены заряды, неизвестно. Решения уравнения Лапласа для отдельных областей должны быть согласованы друг с другом: на границе раздела двух сред с различными

$\varepsilon_A$  должны выполняться граничные условия. На границе раздела проводящего тела и диэлектрика также должны выполняться свои граничные условия.

Задачи третьего типа могут быть решены аналитически или графически либо путем электро моделирования.

В данном параграфе дадим лишь краткую характеристику этих методов (путей решения), с тем чтобы читатель составил некоторое предварительное впечатление о тех методах, с которыми ему придется иметь дело. Более обстоятельное изложение этих методов дано в дальнейшем на конкретных примерах.

Аналитические методы решения задач третьей группы могут быть подразделены на две подгруппы. В первой из них производится интегрирование уравнения Лапласа без использования вспомогательных (искусственных) приемов. Во второй подгруппе используют искусственный прием- метод зеркальных изображений. По методу зеркальных изображений решение производят путем введения вспомогательного заряда или зарядов, которые в расчетном отношении заменяют связанные заряды, выявившиеся на границах тел или сред в результате их поляризации или в результате электростатической индукции.

Графический метод анализа и расчета задач третьей группы представляет собой метод, в котором по определенным правилам производят построение семейств силовых и эквипотенциальных линий, используя некоторые заранее известные свойства исследуемого поля.

В основу анализа и расчета электростатических полей методом моделирования положена аналогия между электростатическим полем и электрическим полем постоянного тока в проводящей среде. Метод моделирования основан на сопоставлении задачи электростатики и сходной задачи на электрическое поле постоянного тока в проводящей среде, в которой совокупность силовых и эквипотенциальных линий практически такая же. Это дает возможность воспользоваться результатами экспериментального исследования поля в проводящей среде при решении родственной электростатической задачи.

В заключение отметим, что в задачах электростатики расчет можно производить либо с целью определения «точечной» характеристики поля (напряженности или потенциала в заданной точке), либо с целью определения интегральной характеристики данного поля, например емкости или разности потенциалов.

### Метод зеркальных изображений.

Для расчета электростатических полей, в особенности ограниченных какой-либо проводящей поверхностью правильной формы или в которых есть геометрически правильной формы граница между двумя диэлектриками, широко применяется метод зеркальных изображений.

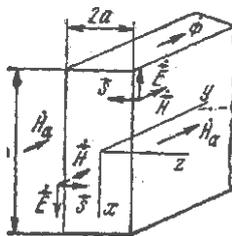
Это искусственный прием расчета. В нем, кроме заданных зарядов, вводят еще дополнительные заряды, величины и местоположение которых выбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям в поле. Если граница между двумя средами плоская, то дополнительные («фиктивные») заряды помещают территориально там, где находятся зеркальные (в геометрическом смысле) отображения заданных зарядов. Метод зеркальных изображений широко применяют не только для расчета электростатических полей, но и для расчета электрических полей в проводящей среде и магнитных полей. Обоснованием метода, обоснованием правильности даваемого им решения является теорема единственности.

### Магнитный поверхностный эффект

В качестве второго примера распространения плоских электромагнитных волн в проводящей среде рассмотрим поле в стальном листе при прохождении вдоль листа переменного магнитного потока  $\Phi_m$ . Лист (рис. 472) имеет толщину  $2a$ , высоту  $h (h \gg 2a)$  и весьма большую протяженность в направлении, перпендикулярном рисунку. Средняя плотность магнитного потока по сечению листа

$$B_{\text{ср}} = \frac{\Phi_m}{2ah}.$$

Рис.472



Задача состоит в определении законов изменения  $H$  и  $E$  по сечению листа. В силу симметрии напряженность магнитного поля на левой поверхности листа та же, что и на правой поверхности листа. Обозначим ее через  $H_a$  и будем полагать известной (в дальнейшем выразим ее через  $B_{\text{ср}}$ ).

Так как толщина листа  $2a$  много меньше высоты листа  $h$ , то искажающим влиянием краев листа на поле можно в первом приближении пренебречь и считать, что в лист с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна.

Расположим оси координат декартовой системы в соответствии

с рис. 472. Примем, как и прежде,  $\vec{H} = jH$ . Общее решение для  $H$  таково:

$$H = C_1 e^{pZ} + C_2 e^{-pZ}.$$

Из граничных условий найдем постоянные интегрирования. При  $z=-a$ , т. е. для точек, находящихся на левой стороне листа:

$$H_A = C_1 e^{-pA} + C_2 e^{pA}; \quad (1).$$

при  $z=+a$

$$H_A = C_1 e^{pA} + C_2 e^{-pA}. \quad (2).$$

Совместное решение (1) и (2) относительно  $C_1$  и  $C_2$  дает

$$C_1 = C_2 = \frac{H_A}{e^{pA} + e^{-pA}} = \frac{H_A}{2chpa}.$$

Следовательно, в произвольной точке

$$H = \frac{H_A}{2chpa} (e^{pZ} + e^{-pZ}) = H_A \frac{shpz}{chpa}. \quad (3).$$

Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \vec{i} \left( -\frac{1}{\gamma} \frac{dH}{dz} \right) = -\vec{i} \left( \frac{p}{\gamma} H_A \frac{shpz}{chpa} \right) = -\vec{i} E.$$

Здесь

$$E = \frac{p}{\gamma} H_A \frac{shpz}{chpa}. \quad (4).$$

При  $z=+a$  напряженность  $\vec{E}$  направлена вверх (вдоль оси  $-x$ ); при  $z=-a$  — вниз (вдоль оси  $+x$ , рис. 472). Вектор Пойнтинга направлен к средней плоскости листа (внутрь листа).

Отношение среднего значения магнитной индукции по сечению листа  $B_{cp}$  к напряженности поля на поверхности листа  $H_a$  называют *комплексной магнитной проницаемостью* и обозначают  $\tilde{\mu}_a$ :

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a thpa}{ap} \left( \tilde{\mu}_a = \mu_0 \tilde{\mu} \right).$$

Она зависит от величины  $x$ , частоты  $\omega$  и от толщины листа. При больших значениях аргумента  $2ka \operatorname{sh} 2ka \approx \operatorname{ch} 2ka$  и значения этих функций намного больше 1. Поэтому при больших значениях  $2ka$

$$thpa \approx \frac{sh2ka}{ch2ka} \approx 1,$$

и комплексная магнитная проницаемость

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{pa}.$$

Так, например, при толщине листа  $2a=0,015$  см,  $\mu = 20\ 000$ ,

$$\gamma = 1.8 * 10^6 \text{ ом}^{-1} * \text{м}^{-1} \quad \text{и} \quad f = 50000 \text{ Гц};$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} = 84200, \quad p = 84200\sqrt{2}e^{j45^\circ}; \quad ka = 6.31;$$

$$2ka = 12.62;$$

$$thpa = \frac{sh12.62}{ch12.62} \approx 1$$

Следовательно,

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{pa} = \frac{20000\mu_0}{84200\sqrt{2}e^{j45^\circ} * 0.000075} = 2250e^{-j45^\circ} * \mu_0.$$

Таким образом,

$$|chpa| = \sqrt{\frac{ch2ka + \cos2ka}{2}}.$$

Таким образом, напряженность поля в средней плоскости листа может быть много меньше напряженности поля на краю листа.

Явление неравномерного распределения поля по сечению проводящего тела, вызванное затуханием электромагнитной волны, называется *поверхностным эффектом*. Если  $\wedge$  вдоль листа направлен магнитный поток, то поверхностный эффект часто называют магнитным, если вдоль плоской шины направлен переменный ток, то имеющий место при этом поверхностный эффект часто называют электрическим поверхностным эффектом. Природа их одна и та же. И дополнительное прилагательное («магнитный» или «электрический») свидетельствует лишь о том, что направлено вдоль листа (шины), поток или ток.

### Прохождение переменного тока по плоской шине (электрический поверхностный эффект)

Рассмотрим задачу, родственную предыдущей. Пусть вдоль шины направлен не переменный магнитный потока переменный ток.

Положительное направление тока и расположение осей декартовой системы координат даны на рис. 473.

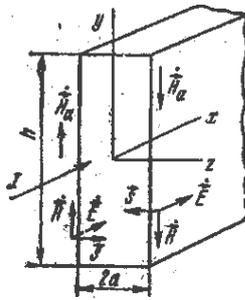


Рис.473

По закону полного тока найдем напряженность магнитного поля на поверхности шины. Так как в данной задаче, как и в предыдущей,  $h \gg 2a$ , то при подсчете  $\oint H dl$  можно в первом приближении пренебречь составляющей интеграла вдоль горизонтальных сторон шириной  $2a$ . Тогда, обозначив напряженность поля на поверхности шины через  $H_a$ , получим

$$H_a 2h = I; \quad \text{отсюда} \quad H_a = \frac{I}{2h}.$$

При составлении уравнений для определения постоянных интегрирования учтем, что слева от шины напряженность ориентирована вдоль положительного направления оси  $y$ , а справа — в отрицательном направлении оси  $y$ .

Общее решение для плоской волны:

$$H = C_1 e^{pz} + C_2 e^{-pz}.$$

Найдем постоянные интегрирования: при  $z = -a$

$$H_a = C_1 e^{-pa} + C_2 e^{pa},$$

при  $z = a$

$$-H_a = C_1 e^{pa} + C_2 e^{-pa}.$$

Совместное решение двух последних уравнений дает

$$C_1 = -C_2 = \frac{-H_a}{2shpa}.$$

Подставим  $C_1$  и  $C_2$  в общее решение. Будем иметь

$$H = -H_a \frac{shpz}{shpa} = -\frac{I}{2h} \frac{shpz}{shpa}.$$

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  направлена вдоль оси  $x$  и согласно предыдущему

$$E = -\frac{1}{\gamma} \frac{dH}{dz}$$

или

$$E = \frac{p}{\gamma} \frac{I}{2h} \frac{chpz}{shpa}$$

Плотность тока в любой точке пластины

$$\delta = \gamma E = p \frac{I}{2h} \frac{chpz}{shpa}$$

Минимальное значение плотности тока будет в средней плоскости шины при  $z=0$ . Оно равно

$$\delta_{z=0} = p \frac{I}{2h} \frac{1}{shpa}$$

Чем толще шина, чем больше  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $\omega$ , тем сильнее проявляется поверхностный эффект, т. е. тем более неравномерным становится распределение плотности тока по сечению шины. И если частота  $\omega$  очень велика, то может оказаться, что ток будет протекать только по тонкому поверхностному слою шины.

При тонких шинах и относительно небольших частотах поверхностный эффект проявляется в малой степени.

### Применение теоремы Умова — Пойнтинга для определения активного и внутреннего индуктивного сопротивления проводников на переменном токе

Определение активного и внутреннего индуктивного сопротивления проводников на переменном токе часто производят при помощи теоремы Умова — Пойнтинга в комплексной форме.

С этой целью подсчитывают поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность проводника на длине в 1 м и делят его на квадрат тока, протекающего по проводнику, получая комплекс сопротивления проводника на единицу длины (на 1 м).

Действительно,

$$-\oint \left[ \vec{E} \vec{H} \right] ds = P + jQ = I^2 R + jI^2 X = I^2 Z$$

и

$$Z = R + jX = \frac{-\oint \left[ \vec{E} \vec{H} \right] ds}{I^2}$$

В качестве примера определим активное и внутреннее индуктивное сопротивления прямоугольной шины длиной в 1 м. Энергия в шину проникает с двух сторон. Поверхность шины с двух сторон на длине в 1 м равна  $2h \cdot l$ :

$$Z = R + jX = \frac{EH^* 2h * 1}{I^2} = \frac{\left(\frac{I}{2h}\right)^2 \frac{p}{\gamma} \frac{1}{thpa}}{I^2} = 2h = \frac{p}{\gamma * 2hthpa}$$

или

$$Z = \frac{1870\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{5.6 * 10^7 * 0.04 * 1.09e^{j16^\circ 20'}} = 9.5 * 10^{-4} + j5.16 * 10^{-4} \text{ ом/м.}$$

Следовательно, активное сопротивление провода на 1 м длины шины равно  $9,5 \cdot 10^{-4}$  ом и внутреннее индуктивное сопротивление  $5,16 \cdot 10^{-4}$  ом.

Для сравнения заметим, что омическое сопротивление единицы длины плоской шины, т. е. сопротивление постоянному току, равно  $8,92 \cdot 10^{-4}$  ом. Таким образом, в результате поверхностного эффекта активное сопротивление увеличилось с  $8,92 \cdot 10^{-4}$  до  $9,5 \cdot 10^{-4}$  ом, т. е. на 6%.

### Эффект близости

До сих пор рассматривалось прохождение переменного тока по уединенному проводнику. Если поблизости от проводника, поле в котором исследуется, есть другой проводник с током, то естественно, что второй проводник влияет на картину поля в первом проводнике. В результате этого влияния активное сопротивление одного провода, как правило, увеличивается по сравнению с активным сопротивлением уединенного провода. Влияние близлежащих проводников с током на комплекс сопротивления исследуемого проводника называют *эффектом близости*. Рассмотрим эффект близости на примере двух плоских шин, близко расположенных одна к другой (рис. 476, а). Одна шина является прямым проводом, другая — обратным.

Если расстояние между шинами  $2b$  такого же порядка, что и толщина шин ( $2a$ ) и много меньше высоты  $h$ , то можно показать, что с известной степенью приближения напряженность магнитного поля в пространстве между шинами в два раза больше напряженности магнитного поля от одной шины в непосредственной близости от шины. А снаружи шин напряженность магнитного поля равна нулю. Для того чтобы убедиться в этом, воспользуемся принципом наложения.

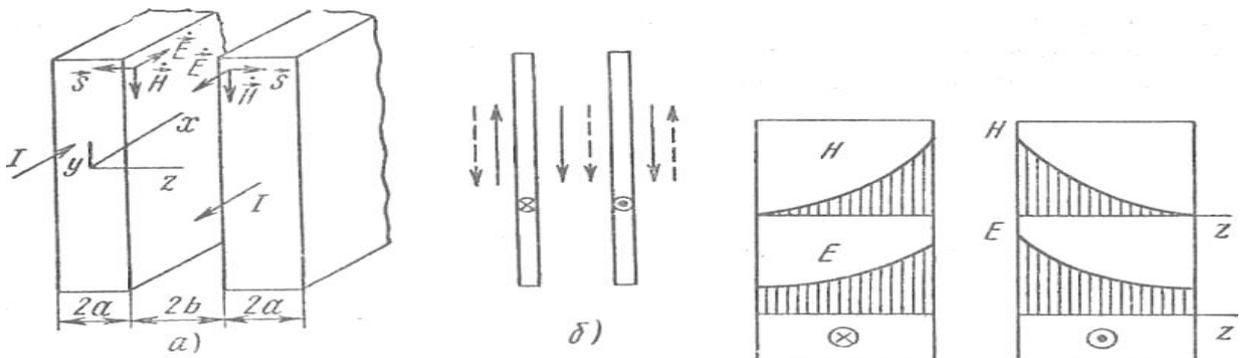


Рис.476. 477.

Сплошные стрелки на рис. 476, б представляют напряженность поля от левой шины, пунктирные — от правой. В пространстве между шинами напряженности складываются, снаружи вычитаются. В результате оказывается, что напряженность магнитного поля в пространстве между шинами  $H = 2 \frac{I}{2h} = \frac{I}{h}$ , а снаружи шин — равна нулю. Найдем постоянные интегрирования в выражении  $H = C_1 e^{pz} + C_2 e^{-pz}$ .

$$\text{При } z = -a \quad 0 = C_1 e^{-pa} + C_2 e^{pa}; \quad \text{при } z = a - \frac{I}{h} = C_1 e^{pa} + C_2 e^{-pa}.$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{-I e^{pa}}{h * 2 \operatorname{sh} 2pa} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{I e^{-pa}}{h 2 \operatorname{sh} 2pa}.$$

Следовательно,

$$H = \frac{-I}{h * 2 \operatorname{sh} 2pa} (e^{pa+pz} - e^{-pa-pz}) = \frac{-I \operatorname{sh} p(a+z)}{h \operatorname{sh} 2pa}.$$

и напряженность электрического поля

$$E = \frac{p I \operatorname{ch} p(a+z)}{\gamma h \operatorname{sh} 2pa}.$$

Если придавать  $z$  значения от  $-a$  до  $a$ , то по написанным выше формулам могут быть построены кривые изменения модулей  $E$  и  $H$  в функции от  $z$ . Такие кривые качественно изображены на рис. 477. Для правой шины кривые построены на основании симметрии поля. Если не учитывать искажающего действия торцов, то электромагнитная волна в каждую из шин проникает только через поверхности их, обращенные друг к другу. Через наружные поверхности электромагнитная волна не проникает, так как там  $H=0$ .

Комплекс сопротивления одной шины на единицу длины

$$Z_{\text{внутр. одной шины}} = \frac{E H * 1}{I^2} = \frac{p}{\gamma h \operatorname{th} 2pa}.$$

### Экранирование в переменном электромагнитном поле

Явление затухания электромагнитной волны в поверхностном слое металла используется для экранировки в переменном электромагнитном поле.

Электромагнитные экраны представляют собой полые цилиндрические, сферические или прямоугольные оболочки, внутрь которых помещается экранируемое устройство (например, катушка индуктивности, измерительный прибор и т. п.).

Экран выполняет две функции. Во-первых, он защищает устройство, заключенное в экран, от влияния внешнего по отношению к экрану электромагнитного поля. Во-вторых, он защищает внешнее по отношению к экрану пространство от электромагнитного поля, создаваемого устройством, заключенным в экране.

Поскольку на расстоянии, равном длине волны в металле, электромагнитная волна почти полностью затухает, то для хорошей экранировки толщина стенки экрана должна быть примерно равна длине волны в металле. Практически приходится учитывать и другие факторы (механическую прочность экрана, его стоимость и т. д.).

### Сопоставление принципов экранирования в электростатическом, в магнитном и электромагнитном полях

Электростатическое экранирование основано на компенсации внешнего поля полем зарядов, выявившихся на стенках экрана вследствие электростатической индукции. Толщина стенок экрана при электростатическом экранировании в отличие от экранирования в магнитном и электромагнитном полях может быть сколь угодно малой. Экранирование в магнитном поле постоянного тока основано, грубо говоря, на том, что силовые линии магнитного поля преимущественно проходят по участкам с меньшим магнитным сопротивлением (по стенкам экрана).

Экранирование в переменном электромагнитном поле основано главным образом на том, что электромагнитная волна, проникающая в стенки экрана, быстро затухает, расходуя энергию на покрытие потерь, обусловленных вихревыми токами в стенках экрана.

### *Высокочастотный нагрев металлических деталей несовершенных диэлектриков. Поверхностная закалка стальных изделий.*

Нагрев металлических деталей перед ковкой и штамповкой, сушку древесины, наплавку и реставрацию инструментов часто производят путем помещения этих предметов (деталей) в электромагнитное поле сравнительно невысокой частоты (1—20 кГц). Стальные изделия (например валы, шестеренки) часто подвергают поверхностной закалке, помещая их в электромагнитное поле более высокой частоты (порядка 10—500 кГц).

Как известно из предыдущего электромагнитная волна, проникая в толщу металла, быстро затухает. Поэтому теплота выделяется практически лишь в относительно тонком поверхностном слое стального изделия.

Под действием теплоты, выделившейся в поверхностном слое, последний быстро разогревается до температуры, необходимой для поверхностной закалки. Область еще более высоких частот (1—30 МГц) используется для высокочастотного нагрева пластмасс перед штамповкой, для термической обработки пищевых продуктов, вулканизации резины и для других целей.

## Понятие о волноводах и объемных резонаторах.

Канализация энергии очень высокой частоты по обычным двухпроводным линиям передачи оказывается практически невозможной ввиду того, что: 1) провода линии играют роль антенн и, вместо того чтобы передавать энергию потребителю, излучают ее в пространство и 2) активное сопротивление проводов линии при сверхвысоких частотах в силу резко выраженного поверхностного эффекта оказывается настолько большим, что весьма значительная часть энергии затрачивается на нагрев проводов.

Применение коаксиального кабеля (коаксиальной линии) рис. 465 для канализации энергии весьма высокой частоты также невыгодно. Хотя в этом случае энергия в окружающее пространство и не излучается (так как оболочка кабеля одновременно является и экраном), однако в кабеле велики потери энергии в жиле и в диэлектрических шайбах, при помощи которых жила крепится внутри кабеля.

При частотах больше  $10^9$  гц энергию передают по волноводам. Волновод представляет собой полую трубу прямоугольного или круглого сечения.

На рис. 487, *a* изображен прямоугольный волновод. Размеры  $a$  и  $b$  находятся в определенном соотношении с длиной волны. Так, например, при длине волны  $\lambda = 10$  см берут  $b = 3,54$  см и  $a = 7,2$  см.

Энергия внутрь волновода доставляется при помощи небольшого стерженька, помещенного в волноводе, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (рис. 487, *a*), или при помощи петли с током, также помещаемой в волноводе, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (рис. 487, *б*).

Отвод энергии с другого конца волновода производится также при помощи стерженька или петли.

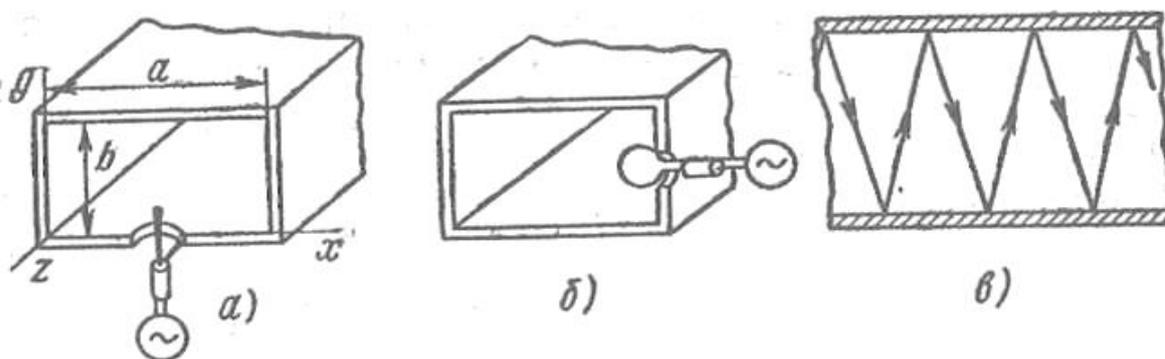


Рис.487

Энергия передается вдоль волновода, отражаясь от его стенок (рис. 487, б). Стенки волновода являются как бы направляющими для потока энергии. Небольшая часть энергии проникает в стенки волновода и выделяется в них в виде теплоты. Для уменьшения потерь энергии в стенках волновода внутреннюю поверхность труб полируют и покрывают слоем хорошо проводящего металла.

В качестве резонансных контуров при не очень высоких частотах применяют контуры с сосредоточенными индуктивностями емкостями или отрезки линий с распределенными параметрами

При сверхвысоких частотах (при длинах волн сантиметрового диапазона) контуры с сосредоточенными параметрами  $L$  и  $C$  и отрезки линий с распределенными параметрами оказываются пригодными, так как они излучают электромагнитную энергию и вследствие этого, а также в силу резко выраженного поверхностного эффекта обладают малой добротностью. При сверхвысоких частотах в качестве устройства, выполняющего функции резонансного контура с высокой добротностью, применяют объемный резонатор.

*Объемный резонатор* представляет собой полый прямоугольный параллелепипед, стенки которого выполнены из хорошо проводящего материала. Длины его трех ребер находятся, как и у волновода, в определенном соотношении с длиной волны и составляют обычно несколько сантиметров. Возбуждают его так же, как и волновод, т. е. при помощи стерженька или петли с током. В полости объемного резонатора возникают стоячие электромагнитные волны по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , так как со всех сторон полость ограничено хорошо проводящими стенками.

В заключении упомянем о явлении дифракции. Дифракцией называют явление отражения и преломления электромагнитных волн от проводящего или диэлектрического тела, а также изменение структуры и направления волны при прохождении и.ч. через отверстие (щель) в каком-либо теле, например в пластинке.